

Ehtimal nəzəriyyəsi

“Məsələn, ayrıca bir adamın hərəkətini qabaqcadan düzgün təxmin eləyə bilməzsən, amma bir qrup adamın nə eləyəcəyini dəqiq deyə bilərsən. Fərdlər fərqlidir, amma xarakterlərin bir-birinə faiz nisbəti dəyişməzdir. Statistik də belə deyir”.

Şerlok Holms
“Dörtlərin işarəsi”

Ehtimal nəzəriyyəsi fənni anakütlənin, müşahidələrin və ya təsadüfi hadisə sayıla biləcək hər şeyin modelləşdirilməsi üçün vasitə təmin edən və bütün statistikanın özünü təşkil edən təməldir. Statistiklər bu modellər vasitəsilə tamın yalnız bir hissəsinin tədqiqi əsasında anakütlə haqqında nəticə çıxarmamı gerçəkləşdirə bilirlər.

Ehtimal nəzəriyyəsi uzun və zəngin bir tarixə malikdir və onun tarixi ən azı XVII əsrə gedib çıxır. O zaman Paskal və Fermat dostları şevallye de Merenin xahişi ilə qumar oyununun riyazi formulunu işləyib-hazırlamışdılar.

Bu fəslin məqsədi ehtimal nəzəriyyəsinə hərtərəfli giriş vermək deyil; belə bir cəhd bu qədər qısa müddətdə mümkün deyil. Əksinə, biz statistikanın öyrənilməsi üçün əsas olan ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi əsas ideyalarını təsvir etməyə çalışırıq.

Statistika ehtimal nəzəriyyəsinin təməli üzərində qurulduğu kimi, ehtimal nəzəriyyəsi də öz növbəsində çoxluqlar nəzəriyyəsi üzərində qurulub. Bu səbəbdən çoxluqlar nəzəriyyəsiindən başlayırıq.

1.1 Çoxluqlar nəzəriyyəsi

Statistikin əsas məqsədlərindən biri eksperiment aparmaqla anakütlə haqqında nəticə çıxarmaqdır. Bu mərhələdə ilk addım mümkün nəticələri və ya statistika terminologiyası ilə desək, “nümunə sahəsi”ni (*sample space*) müəyyən etməkdir.

Tərif 1.1.1 Müəyyən bir təcrübənin bütün mümkün nəticələrinin çoxluğu – S təcrübə üçün *nümunə sahəsi* adlanır.

Əgər eksperiment qəpik atmaqdan ibarətdirsə, nümunə sahəsi iki nəticədən: baş (H) və quyruq (T) hissədən ibarət olacaq; beləliklə,

$$S = \{H, T\}$$

Digər tərəfdən, eksperiment ixtiyari bir universitetdə təsadüfi yolla seçilmiş tələbələrin SAT imtahanının nəticələrini müşahidə etməkdən ibarətdirsə, nümunə sahəsi 200 ilə 800 arasındakı müsbət tam ədədlər olacaq ki, bu da onun çoxluğudur, yəni $S = \{200, 210, 220, \dots, 780, 790, 800\}$. Yekun olaraq hər hansı bir eksperimenti nəzərdən keçirin. Burada nümunə sahəsi bütün müsbət ədədlərdən ibarət olacaq, yəni $S = (0, \infty)$.

Nümunə sahəsini ona daxil olan elementlərin sayına görə iki növə bölə bilərik. Nümunə sahəsi sayıla bilən və ya sayıla bilməyən ola bilər. Nümunə sahəsinin elementləri tam ədədlərin altçoxluluğuna daxil edilə bilərsə, nümunə sahəsi hesablanı bilər. Təbii ki, əgər nümunə sahəsində yalnız sonlu sayda element varsa, onu hesablamaq olar. Beləliklə, qəpik atma və SAT imtahan nəticələrinin nümunəsi hesablanı bilər (sonlu olduğu üçün). Ancaq reaksiya vaxtı (*reaction time*) nümunə sahəsi sayıla bilməz, çünki müsbət real ədədləri tam ədədlərlə bir-bir uyğunlaşdırmaq mümkün deyil. Bununla belə, reaksiya vaxtını ən yaxın saniyədə ölçsək, nümunə sahəsi (saniyələrlə) $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olar, sonra hesablanı bilər.

Sayıla bilən və sayıla bilməyən nümunə sahələri arasındakı bu fərq yalnız ehtimalların təyin edilə bilməsi baxımından vacibdir. Ehtimalların hesablanması riyazi üsulları fərqli olsa da, əksər hallarda bu heç bir çətinlik yaratmır. Yüksək səviyyədə yalnız hesablanı bilən nümunə sahələrinin ola biləcəyi iddia edilə bilər, çünki hesablamalar tam dəqiqliklə aparıla bilməz (təbii ki, bütün onrəqəmli ədədlərdən ibarət nümunə sahəsi hesablanı bilən nümunə sahəsidir). Bu, praktikada doğru olsa da, sonsuz nümunə sahələri ilə əlaqəli ehtimal və statistik üsullar, ümumiyyətlə, sayıla bilən nümunə sahələrinə nisbətən daha asan olur və real (hesablanı bilən) vəziyyətə yaxın bir ehtimal alınır.

Nümunə sahəsi müəyyən ediləndən sonra eksperimentin mümkün nəticələrinin toplanmasını nəzərdən keçirə bilərik.

Tərif 1.1.2 *Hadisə* eksperimentin mümkün nəticələrinin istənilən toplusudur, yəni S -in hər hansı bir altçoxluluğudur (S -in özü də daxil olmaqla).

Fərz edək ki, A ixtiyari bir hadisədir və S -in altçoxluluğudur. Biz deyirik ki, eksperimentin nəticəsi A çoxluğunda olsa, A hadisəsi baş verər. Ehtimallardan bəhs edərkən biz, ümumiyyətlə, çoxluqdan daha çox hadisənin başvermə ehtimalından danışırıq.

Əvvəlcə çoxluqları sıralamağa və bərabərləşdirməyə imkan verən aşağıdakı iki əlaqəni formal olaraq müəyyən etməliyik:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \quad (\text{daxilolma})$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ və } B \subset A \quad (\text{bərabərlik})$$

Verilmiş hər hansı iki A və B hadisəsi (və ya çoxluqları) əsasında aşağıdakı sadə çoxluq əməliyyatlarını nəzərdən keçirək:

Birləşmə: $A \cup B$ ilə yazılmış A və B birləşmələri ya A hadisəsinə, ya B hadisəsinə, ya da hər ikisinə aid olan elementlər toplusudur:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ və ya } x \in B\}$$

Kəsişmə: $A \cap B$ ilə yazılmış A və B kəsişməsi həm A , həm də B elementlərinə aid olan elementlər toplusudur:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ və ya } x \in B\}$$

Tamamlayıcı: A^c yazılmış A tamamlayıcısı A -da olmayan və S -ə daxil olan bütün elementlərin çoxluğudur:

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Misal 1.1.3 (Hadisələr üzərində əməliyyatlar) Standart kart oyununda təsadüfi yolla seçilmiş kartların bütün mümkün formaları aşağıdakı kimi verilib: xaç (C), kərpic (D), qırmızı ürək (H) və ya qara ürək (S). Bu zaman nümunə sahəsi aşağıdakı kimi olacaq:

$$S = \{C, D, H, S\}$$

Mümkün olan hadisələrə misal olaraq aşağıdakıları göstərə bilərik:

$$A = \{C, D\} \text{ və } B = \{D, H, S\}$$

Bu hadisələr əsasında isə aşağıdakıları tapa bilərik:

$$A \cup B = \{C, D, H, S\}, A \cap B = \{D\} \text{ və } A^c = \{H, S\}$$

Bundan əlavə, diqqət yetirin ki, $A \cup B = S$ (S hadisəsini) və $(A \cup B)^c = \emptyset$; burada $\emptyset$ boş çoxluğunu (heç bir elementdən ibarət olmayan çoxluğu) bildirir. ||

Sadə çoxluqlar üzərindəki əməliyyatlar bir qədər toplama və vurma üsuluna bənzəyir. Demək olar ki, çoxluqlara ədədlər kimi baxa bilərik. İndi çoxluqlar üzərində aparılan əməliyyatların aşağıdakı faydalı xüsusiyyətlərini qeyd edə bilərik.

Teorem 1.1.4 S nümunə sahəsinə daxil olan ixtiyari A, B , və C hadisələri üçün:

- | | |
|------------------------------|--|
| a. Kommutativlik | $A \cup B = B \cup A,$
$A \cap B = B \cap A;$ |
| b. Assosiativlik | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$ |
| c. Paylanma qanunları | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$ |
| d. DeMorgan qanunları | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$ |

İsbat: Bu teoremin çox hissəsinin isbatı məsələ 1.3-də soruşulur. Həmçinin məsələ 1.9 və 1.10 teoremi ümumiləşdirir. Bununla belə, nümunə üçün paylanma qanununu isbat edəcəyik:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(Çoxluqlar nəzəriyyəsində teoremləri “isbat etmək” üçün Venn diaqramlarından istifadə ilə tanış ola bilərsiniz. Qeyd edək ki, Venn diaqramları bəzən situasiyanın vizuallaşdırılmasında faydalı olsa da, onların isbatda istifadə olunması formal olaraq düzgün deyil). İki çoxluğun bərabər olduğunu isbat etmək üçün hər çoxluğun digərini ehtiva etdiyini göstərmək lazımdır. Onda

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \in S : x \in A \text{ və } x \in (B \cup C)\}; \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) &= \{x \in S : x \in (A \cap B) \text{ və ya } x \in (A \cap C)\} \end{aligned}$$

Öncə $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olduğunu göstərək. Burada $x \in (A \cap (B \cup C))$. Kəsişmənin tərifinə görə, $x \in (B \cup C)$, yəni ya $x \in B$, ya da $x \in C$ olmalıdır. x də A -da olmalı olduğundan bizdə ya $x \in (A \cap B)$, ya da $x \in (A \cap C)$; buna görə də

$$x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

və “daxilolma” əlaqəsini ödəyir.

İndi isə fərz edək ki, $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Bu o deməkdir ki, $x \in (A \cap B)$ və ya $x \in (A \cap C)$. Əgər $x \in (A \cap B)$, onda x həm A , həm də B -yə daxildir. Həmçinin $x \in B$, $x \in (B \cup C)$ olduğundan $x \in (A \cap (B \cup C))$ da doğrudur. Digər tərəfdən, $x \in (A \cap C)$ olsa, belə nəticəyə gəlirik ki, $x \in (A \cap (B \cup C))$. Beləliklə, bunu alırıq: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Bu isə o deməkdir ki, çoxluqların paylanma qanununu isbat etdik. $\square$

Birləşmə və kəsişmə əməliyyatları sonsuz sayda hadisələr toplusu da ola bilər. Əgər $A_1, A_2, A_3, \dots$ çoxluqlar toplusudursa, həmçinin S nümunə sahəsinə daxildirsə, onda

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{bəzi } i\text{-lər üçün } x \in S : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{bütün } i\text{-lər üçün } x \in S : x \in A_i\}$$

Məsələn, $S = (0, 1]$ olanda $A_i = [(1/i), 1]$ hadisəsini müəyyən edək. Onda

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} [(1/i), 1] = \{\text{bəzi } i\text{-lər üçün } x \in (0, 1] : x \in [(1/i), 1]\} \\ &= \{x \in (0, 1] : x \in [(0/1), 1]\} \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} [(1/i), 1] = \{\text{bütün } i\text{-lər üçün } x \in (0, 1] : x \in [(1/i), 1]\} \\ &= \{x \in (0, 1] : x \in [1, 1]\} = \{1\} \end{aligned} \quad (1 \text{ xalı üçün})$$

Sayıla bilməyən çoxluqlar üzərində də birləşmələri və kəsişmələri müəyyən etmək mümkündür. Əgər Γ indeks kimi istifadə olunacaq elementlər toplusudursa, onda

$$\bigcup_{a \in \Gamma} A_a = \{\text{bəzi } a\text{-lar üçün } x \in S : x \in A_a\}$$

$$\bigcap_{a \in \Gamma} A_a = \{\text{bütün } a\text{-lar üçün } x \in S : x \in A_a\}$$

Məsələn, $\Gamma = \{\text{bütün müsbət həqiqi ədədlər}\}$ və $A_a = (0, a]$ götürsək, onda $\bigcup_{a \in \Gamma} A_a = (0, \infty)$ sayıla bilməyən birləşmədir. Halbuki sayıla bilməyən birləşmələr və kəsişmələr statistikada mühüm rol oynamır. Onlar bəzən, sadəcə, cavab almaq üçün faydalı mexanizmdirlər (baxın: bölüm 8.2.3).

İndi isə nümunə sahəsinin paylanma formasını müzakirə edək.

Tərif 1.1.5 Əgər $A \cap B = \emptyset$ olsa, A və B *birgə olmayan* hadisələrdir (yaxud *bir-birini istisna edir*). Bütün $i \neq j$ üçün əgər $A_i \cap A_j = \emptyset$ olsa, onda $A_1, A_2, \dots$ *cüt-cüt birgə olmayan* hadisələrdir (yaxud *bir-birini istisna edir*).

Birgə olmayan çoxluqlar ortaq nöqtələri olmayan çoxluqlardır. İki birgə olmayan çoxluqlar üçün Venn diaqramını çəksək, çoxluqların kəsişməsi boş çoxluq olacaq. Burada

$$A_i = [i, i + 1), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

A_i cüt-cüt birgə olmayan çoxluqlardan ibarətdir. Daha sonra qeyd edək ki, $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = [0, \infty)$.

Tərif 1.1.6 Əgər $A_1, A_2, \dots$ cüt-cüt birgə olmayan hadisələdirsə və $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = S$, o zaman $A_1, A_2, \dots$ *hadisələri S -in altçoxluğu*dur.

$A_i = [i, i + 1)$ çoxluqları $[0, \infty)$ bölməsini təşkil edir. Ümumiyyətlə, bölmələr çox faydalıdır, nümunə sahəsini kiçik, üst-üstə düşməyən hissələrə bölməyə imkan verir.

1.2 Ehtimal nəzəriyyəsinin əsasları

Eksperiment həyata keçirildikdə onun həyata keçirilməsi nümunə sahəsində bir nəticədir. Eksperiment bir neçə dəfə həyata keçirilirsə, hər dəfə fərqli nəticələr alınır və ya bəzi nəticələr təkrarlana bilər. Nəticənin bu “başvermə tezliyi” bir ehtimal kimi düşünülə bilər. Daha çox ehtimal olunan nəticələr daha tez-tez baş verir. Eksperimentin nəticələrini ehtimalla ifadə etmək mümkün olarsa, biz eksperimentin statistik təhlilinə başlaya bilərik.

Bu bölmədə ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi əsaslarından bəhs edəcəyik. Biz ehtimalları tezliklər baxımından müəyyən etmirik, əksinə, riyazi cəhətdən daha sadə aksiomatik yanaşmadan istifadə edirik. Göründüyü kimi, aksiomatik yanaşma ehtimalların şərhinə aid deyil, yalnız ehtimalların aksiomları təmin edən funksiya ilə müəyyən edilməsinə aiddir. Ehtimalların şərhini tamamilə başqa məsələdir. Hadisənin “başvermə tezliyi” ehtimalın xüsusi şərhinə bir nümunədir. Başqa bir mümkün şərh subyektivdir, burada ehtimalı tezlik kimi təsəvvür etməkdənsə, onu hadisənin başvermə şansına inam kimi təsəvvür edə bilərik.

1.2.1 Aksiomatik əsaslar

S nümunə sahəsindəki hər bir A hadisəsi üçün ehtimal hesabladıqda onu $P(A)$ kimi işarə edəcəyik və onun alacağı qiymət sıfırla bir arasında dəyişəcək. P -nin ($P(\cdot)$ funksiyasının arqumentlərinin təyin olunduğu çoxluq) domenini S -in bütün altçoxluqları kimi müəyyən etmək təbii görünür; yəni hər bir $A \subset S$ üçün $P(A)$ -nı A -nın başvermə ehtimalı kimi müəyyən edirik. Təəssüf ki, məsələlər o qədər də sadə deyil. Bəzi texniki çətinlikləri aradan qaldırmaq lazımdır. Bu texniki məqamlar üzərində dayanmayacağıq. Əhəmiyyət kəsb etmələrinə baxmayaraq, bunlar statistiklərdən də çox, adətən, ehtimalçılar üçün maraqlıdır. Bununla belə, statistikanın daha yaxşı başa düşülməsi ən azı aşağıdakılarla yaxından tanış olmağı tələb edir.

Tərif 1.2.1 Aşağıdakı üç xassə təmin edildiyi halda S -in altçoxluqlarının toplusu $\mathcal{B}$ ilə işarələnən *sigma cəbri* və ya $\mathcal{B}$ *sahəsi* (yaxud *Borel sahəsi*) adlanır:

- a. $\emptyset \in \mathcal{B}$ (boş çoxluq $\mathcal{B}$ -nin elementidir).
- b. Əgər $A \in \mathcal{B}$ olsa, onda $A^c \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ nümunə sahəsinə bərabərdir).
- c. Əgər $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$ (bu birləşmələr də $\mathcal{B}$ -yə aiddir).

Boş çoxluq $\emptyset$ istənilən çoxluğun altçoxluğudur. Beləliklə, $\emptyset \subset S$. Xassə (a) bu altçoxluğun həmişə sigma sahəsində olduğunu bildirir. $S = \emptyset^c$ olduğundan (a) və (b) xassələri $\mathcal{B}$ -nin həmişə S -ə bərabər olduğunu bildirir. Bundan əlavə, DeMorgan qanunlarından belə çıxır ki, sayıla bilən kəsişmələr $\mathcal{B}$ -yə daxildir. Əgər $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ olsa, onda (b) xassəsinə görə $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{B}$ və $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{B}$. Bununla belə, DeMorgan qanunundan istifadə etməklə (məsələn 1.9-da olduğu kimi) aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$(1.2.1) \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Bu isə (b) xassəsidir, yəni $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

Nümunə sahəsi S ilə əlaqəli bir çox fərqli siqma sahələri ola bilər. Məsələn, iki çoxluğun toplusu $\{\emptyset, S\}$ siqma sahəsidir və bu, adətən, “trivial siqma sahəsi” adlanır. Bizim nəzərdə tutduğumuz yeganə siqma sahəsi verilmiş S nümunə sahəsində bütün açıq çoxluqları özündə birləşdirən ən kiçik sahədir.

Misal 1.2.2 (Siqma sahəsi – I) Əgər S sonlu və ya sayla biləndirsə, biz verilmiş S nümunə sahəsi üçün mümkün olan bütün kombinasiyaları müəyyən edirik.

$$\mathcal{B} = \{S\text{-in özü də daxil olmaqla } S\text{-in bütün altçoxluqları}\}$$

Əgər S -in n elementi varsa, onda $\mathcal{B}$ -də bütün mümkün çoxluqların sayı 2^n olacaq (məsələ 1.14-ə baxın). Məsələn, $S = \{1, 2, 3\}$ olsa, $\mathcal{B}$ $2^3 = 8$ çoxluqlardan ibarət aşağıdakı topludur:

$$\begin{array}{lll} \{1\} & \{1, 2\} & \{1, 2, 3\} \\ \{2\} & \{1, 3\} & \emptyset \\ \{3\} & \{2, 3\} & \end{array} \quad \parallel$$

Ümumiyyətlə, əgər S sayla bilməyəndirsə, $\mathcal{B}$ -ni müəyyən etmək asan məsələ deyil. Bununla belə, $\mathcal{B}$ maraq dairəsində olan hər hansı toplunu ehtiva etmək üçün seçilir.

Misal 1.2.3 (Siqma sahəsi – II) $S = (-\infty, \infty)$ ədəd oxu olsun. Bu zaman $\mathcal{B}$ bütün a və b həqiqi ədədləri üçün

$$[a, b], \quad (a, b], \quad (a, b) \quad \text{və} \quad [a, b)$$

formasının bütün dəstlərini ehtiva etmək üçün seçilir. Həmçinin $\mathcal{B}$ -nin xassələrindən belə nəticə çıxır ki, $\mathcal{B}$ yuxarıda göstərilən müxtəlif çoxluqların birləşmələri və kəsişmələri (sonsuz sayda mümkün ola bilən bütün kombinasiyalar) nəzərə alınmaqla formalaşa bilən bütün çoxluqları ehtiva edir. $\parallel$

İndi isə ehtimal funksiyasını müəyyən edə bilərik.

Tərif 1.2.4 Verilən S nümunə sahəsi və $\mathcal{B}$ siqma sahəsi üzrə *ehtimal funksiyası* elə $\mathcal{B}$ sahəsinə malik P funksiyasıdır.

1. $P(A) \geq 0$ bütün $A \in \mathcal{B}$ üçün.
2. $P(S) = 1$.
3. Əgər $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ cüt-cüt bərgə olmayan hadisələrdirsə, onda $P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Tərif 1.2.4-də verilmiş üç xassə, adətən, “ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları” (və ya ehtimal nəzəriyyəsinin banilərindən biri olan A.Kolmoqorovun adı ilə “Kolmoqorov aksiomları”) adlanır. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyən istənilən P funksiyası ehtimal funksiyası adlanır. Aksiomatik tərif hansı P funksiyasının seçilməsini deyil, sadəcə, aksiom şərtlərinin təmin olunmasını tələb edir. İstənilən nümunə sahəsi üçün çoxlu müxtəlif ehtimal funksiyaları müəyyən edilə bilər. Müəyyən bir eksperimentdə hansının müşahidə oluna biləcəyini əks etdirməsi hələ də müzakirə edilməlidir.

Misal 1.2.5 (Ehtimalların müəyyən edilməsi – I) “Ədalətli sikkə”nin atışı ilə bağlı sadə eksperimenti nəzərdən keçirək. Belə ki, $S = \{H, T\}$. “Ədalətli sikkə” dedikdə sikkənin atılması zamanı iki üzündən birinin düşmə ehtimalı eyni olan balanslaşdırılmış sikkə nəzərdə tutulur, buna görə də uyğun ehtimal funksiyası sikkənin hər iki üzünə dair bərabər ehtimalları ehtiva edir. Yəni

$$(1.2.2) \quad P(\{H\}) = P(\{T\})$$

Qeyd edək ki, (1.2.2) ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından irəli gəlmir, əksinə, aksiomlardan fərqlidir. Sikkənin hər bir üzünün düşmə ehtimalının eyni olması tələbini qoymaq üçün ehtimalın simmetriya şərhindən (və ya, sadəcə, intuisiyadan) istifadə edirik. $S = \{H\} \cup \{T\}$ olduğundan 1-ci aksioma əsasən $P(\{H\} \cup \{T\}) = 1$ olur. Həmçinin $\{H\}$ və $\{T\}$ birgə olmayandır. Ona görə də $P(\{H\} \cup \{T\}) = P(\{H\}) + P(\{T\})$ və

$$(1.2.3) \quad P(\{H\}) + P(\{T\}) = 1$$

(1.2.2) və (1.2.3) bərabərliklərinin eyni vaxtda həlli göstərir ki, $P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$ (1.2.2) aksiomlara deyil, xüsusi təcrübə haqqında biliklərimizə əsaslandığından (1.2.3)-ü təmin edən $P(\{H\})$ və $P(\{T\})$ üçün hər hansı qeyri-mənfi qiymətlər ehtimal funksiyasını müəyyən edir. Məsələn, biz $P(\{H\}) = \frac{1}{9}$ və $P(\{T\}) = \frac{8}{9}$ seçə bilərik. ||

Kolmoqorovun aksiomlarını həmişə təmin edəcəyini bildiyimiz ehtimal funksiyalarını təyin etmək üçün ümumi üsullara ehtiyacımız var. Misal 1.2.5-də etdiyimiz kimi, hər bir yeni ehtimal funksiyası üçün aksiomları yoxlamaq istəmirik. Aşağıda ehtimal funksiyasını təyin etmək üçün ümumi üsul verilib.

Teorem 1.2.6 *Tutaq ki, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ sonlu çoxluqdur. $\mathcal{B}$ isə S -in altçoxluqlarının istənilən sigma sahəsidir. $p_1, \dots, p_n$ cəmi 1 olan qeyri-mənfi ədədlərdir. Bu zaman istənilən $A \in \mathcal{B}$ üçün $P(A)$ aşağıdakı kimi müəyyən edilir.*

$$P(A) = \sum_{\{i: s_i \in A\}} p_i$$

(Boş çoxluq üzərində cəm 0 kimi müəyyən edilib). Onda P $\mathcal{B}$ -nin ehtimal funksiyasıdır. Əgər $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ sayıla bilən çoxluqdursa, onda bu ifadə doğrudur.

İsbat: Burada biz sonlu olan S üçün isbat verəcəyik. İstənilən $A \in \mathcal{B}$ üçün $P(A) = \sum_{\{i: s_i \in A\}} P(A_i)$ $p_i \geq 0$, çünki hər $p_i \geq 0$.

Beləliklə, aksiom 1 doğrudur. İndi

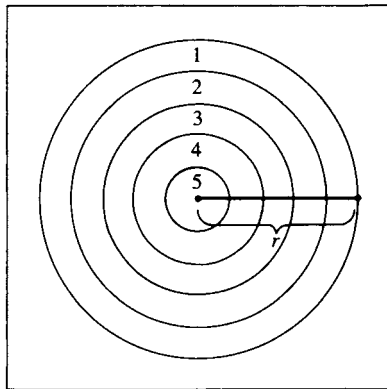
$$P(S) = \sum_{\{i: s_i \in S\}} p_i = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Beləliklə, aksiom 2 doğrudur. Tutaq ki, $A_1, \dots, A_k$ cüt-cüt birgə olmayan hadisələrdir (B yalnız sonlu sayda çoxluqları ehtiva edir, ona görə də biz yalnız sonlu sayda birgə olmayan birləşmələri nəzərdən keçirməliyik).

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{\{j: s_j \in \bigcup_{i=1}^k A_i\}} p_j = \sum_{i=1}^k \sum_{\{j: s_j \in A_i\}} p_j = \sum_{i=1}^k P(A_i)$$

Birinci və üçüncü bərabərlik $P(A)$ ehtimalının tərifinə əsasən doğrudur. A_i -lərin birgə olmayan olması ikinci bərabərliyin doğru olmasını təmin edir, çünki eyni p_j -lər bərabərliyin hər bir tərəfində bir dəfə qeyd olunur. Beləliklə, aksiom 3 doğrudur və Kolmoqorovun aksiomları təmin edilir. □

Növbəti nümunə eksperimentin fiziki olaraq həyata keçirilməsi zamanı ehtimalın necə təyin olunmasını daha aydın göstərir.



Şəkil 1.2.1. Misal 1.2.7 üçün dart lövhəsi

Misal 1.2.7 (Ehtimalların müəyyən edilməsi – II) Dart oyunu lövhəyə ox atmaqla və dartin düşdüyü bölgəyə (zonaya) verilən nömrəyə uyğun xal almaqla oynanılır. Təcrübəsiz bir oyunçu da dartin müəyyən bir bölgəyə düşmə ehtimalının bölgənin sahəsi ilə mütənasib olduğunu anlayır. Beləliklə, daha böyük bir bölgənin vurulma ehtimalı daha yüksəkdir.

Şəkil 1.2.1-ə istinad edərək dart lövhəsinin radiusunun r , halqalar arasındakı məsafənin isə $r/5$ olduğunu görürük. Əgər lövhənin həmişə vurulduğunu fərz etsək (bu barədə məsələ 1.7-yə baxın), onda biz

$$P(i \text{ xallarının hesablanması}) = \frac{i \text{ bölgəsinin sahəsi}}{\text{Dart lövhəsinin sahəsi}}$$

Məsələn:

$$P(1 \text{ xalının hesablanması}) = \frac{\pi r^2 - \pi(r/5)^2}{\pi r^2} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Ümumi düsturu əldə etmək asandır və biz bunun π və r -dən asılı olmadığını görürük:

$$P(i \text{ xallarının hesablanması}) = \frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2}, \quad i = 1, \dots, 5$$

Birgə olmayan bölgələrin sahələrinin cəmi dart lövhəsinin sahəsinə bərabərdir. Beləliklə, beş nəticə üzrə təyin edilmiş ehtimallar 1-ə bərabərdir və teorem 1.2.6-ya görə, bu, ehtimal funksiyasıdır (məsələ 1.8-ə baxın). ||

Ehtimalın aksiomatik inkişafını yekunlaşdırmazdan əvvəl nəzərə alınmalı olan daha bir məqam var. Tərif 1.2.4-ün aksiom 3-ü statistiklər arasında hamılıqla qəbul olunmasa da, adətən, *sayla bilən əlavəlik aksiomu* kimi tanınır. Həqiqətən, aksiomların sadə, aydın və başadüşülən olmasının lazım olduğunu iddia etmək olar. Aksiom 3-ü sadə və aydın olan digər aksiomlarla müqayisə etdikdə bu, aksiomun doğru olub-olmadığına şübhə ilə yanaşmağa səbəb ola bilər.

Sayla bilən əlavəlik aksiomu bu aksiomu sonlu əlavəlik aksiomu ilə əvəz etməyi seçən deFinettinin (1972) rəhbərlik etdiyi statistiklər məktəbi tərəfindən qəbul edilmir. *Sonlu əlavəlik aksiomu:* Əgər $A \in \mathcal{B}$ və $B \in \mathcal{B}$ birgə olmayandırsa, onda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Baxmayaraq ki, bu aksiom tamamilə aydın olmaya bilər, o, şübhəsiz ki, sayıla bilən əlavəlik aksiomundan daha sadədir (məsələn 1.12-yə baxın).

Yalnız sonlu əlavəliyi fərz etmək, sadə olsa da, statistik nəzəriyyədə gözlənilməz fəsadlara (mövzunun başa düşülməsini gücləndirməyə mütləq mane olan fəsadlar) gətirib çıxara bilər. Buna görə də sayıla bilən əlavəlik aksiomunun mövcud olduğu fərziyyəsi ilə davam edirik.

1.2.2 Ehtimalların hesablanması

Ehtimal aksiomlarından ehtimal funksiyasının bir çox xassələrini, daha mürəkkəb ehtimalların hesablanmasında kifayət qədər faydalı olan xassələri qura bilərik. Bu manipulyasiyalardan bəziləri bu bölmədə ətraflı müzakirə olunacaq; digərləri məsələn olaraq qalacaq.

Tək bir hadisə üzərində ehtimal funksiyasının bəzi (kifayət qədər aydın) xassələrindən başlayaq.

Teorem 1.2.8 *Əgər P ehtimal funksiyasıdırsa və A B -də hər hansı bir çoxluqdırsa, onda*

- a. $P(\emptyset) = 0$, burada $\emptyset$ boş çoxluqdur;
- b. $P(A) \leq 1$;
- c. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

İsbat: Əvvəlcə (c) bəndini isbat etmək daha asandır. A və A^c çoxluqları nümunə sahəsinin bir hissəsini təşkil edir, yəni $S = A \cup A^c$. Buna görə də ikinci aksioma əsasən aşağıdakı bərabərliyi yazmaq olar:

$$(1.2.4) \quad P(A \cup A^c) = P(S) = 1$$

Həmçinin A və A^c birgə olmayan çoxluqlardır. Buna görə də üçüncü aksioma görə,

$$(1.2.5) \quad P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

(1.2.4) və (1.2.5) bəndlərinin birləşdirilməsi (c) bəndini verir.

$P(A^c) \geq 0$ olduğundan (b) bəndi (c) bəndinin əsasında alınır. (a)-nı isbat etmək üçün $S = S \cup \emptyset$ üzərində oxşar yanaşmadan istifadə edirik (xatırladaq ki, həm S , həm də $\emptyset$ həmişə B -yə daxildir). S və $\emptyset$ birgə olmayan olduğundan

$$1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$$

və buna görə də $P(\emptyset) = 0$. □

Teorem 1.2.8 aksioma xas xüsusiyyətlərə malikdir və buna görə də biz onları yalnız əsas üç Kolmoqorov aksiomundan istifadə etməklə isbat etmişik. İsbat baxımından teorem 1.2.8-lə oxşar olan növbəti teoremdə o qədər də aydın olmayan ifadələr var.

Teorem 1.2.9 *Əgər P ehtimal funksiyasıdırsa və A və B $\mathcal{B}$ -də hər hansı çoxluqdırsa, onda*

- a. $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$;
- b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- c. Əgər $A \subset B$, onda $P(A) \leq P(B)$.

İsbat: (a) bəndini qurmaq üçün qeyd edək ki, hər hansı A və B çoxluqları üçün

$$B = \{B \cap A\} \cup \{B \cap A^c\}$$

və buna görə də

$$(1.2.6) \quad P(B) = P(\{B \cap A\} \cup \{B \cap A^c\}) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

Burada (1.2.6)-dakı sonuncu bərabərlik $B \cap A$ və $B \cap A^c$ -nin birgə olmayan olması faktından irəli gəlir. (1.2.6)-nın yenidən təşkili (a) bəndini verir.

(b) bəndini müəyyən etmək üçün bu eynilikdən istifadə edirik:

$$(1.2.7) \quad A \cup B = A \cup \{B \cap A^c\}$$

Venn diaqramında (1.2.7) bərabərliyini göstərməklə onu isbat etmək daha asandır (baxın: məsələ 1.2). (1.2.7) və A , $B \cap A^c$ -nin birgə olmayan olması faktından istifadə edərək (A və A^c olduğu üçün) (a)-dan əldə edirik:

$$(1.2.8) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Əgər $A \subset B$ olsa, onda $A \cap B = A$. Buna görə də (a) bəndindən istifadə edərək (c) bəndini əldə etdik.

$$0 \leq P(B \cap A^c) = P(B) - P(A) \quad \square$$

Teorem 1.2.9-un (b) bəndi kəsişmənin ehtimalı üçün faydalı bərabərsizlik verir. $P(A \cup B) \leq 1$ olduğundan (1.2.8)-dən bir qədər düzəlişlərdən sonra aşağıdakı bərabərsizliyi əldə edirik:

$$(1.2.9) \quad P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

Bu bərabərsizlik *Bonferroni bərabərsizliyi* kimi tanınır (Miller, 1981 buna yaxşı istinaddır). Bonferroni bərabərsizliyi bizə eyni vaxtda baş verən hadisənin (kəsişmənin) ehtimalını ayrı-ayrı hadisələrin ehtimalları baxımından birləşdirməyə imkan verir.

Misal 1.2.10 (Bonferroni bərabərsizliyi) Bonferroni bərabərsizliyi xüsusilə kəsişmənin ehtimalını hesablamaq çətin (və ya hətta qeyri-mümkün) olduğu zaman faydalıdır. Lakin bu ehtimalın hesablanması ilə bağlı bəzi ideyalara ehtiyac duyulur. Tutaq ki, A və B iki hadisədir və hər birinin ehtimalı 0,95-dir. Onda hər ikisinin başvermə ehtimalı aşağıdakı kimi olacaq:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0,95 + 0,95 - 1 = 0,90$$

Qeyd edək ki, hər bir hadisənin ehtimalı kifayət qədər böyük deyilsə, Bonferroni bərabərsizliyi faydasız (lakin düzgün!) mənfəi ədəddir. ||

Bu bölümü çoxluqlar toplusu ilə işləmək üçün bəzi faydalı nəticələr verən teoremlə yekunlaşdırırıq.

Teorem 1.2.11 *Əgər P ehtimal funksiyasıdırsa, onda*

a. $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$, *istənilən hissə üçün $C_1, C_2, \dots$;*

b. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *istənilən çoxluq üçün $A_1, A_2, \dots$ (Bul bərabərsizliyi)*

İsbat: $C_1, C_2, \dots$ hissələrini yaratsaq, bütün $i \neq j$ üçün $C_i \cap C_j = \emptyset$ və $S = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ alarıq. Beləliklə,

$$A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)$$

Burada sonuncu bərabərlik paylanma qanunundan irəli gəlir (teorem 1.1.4). Buna görə də

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)\right)$$

C_i birgə olmayan hissələr olduğundan $A \cap C_i$ çoxluqları da birgə olmayandır və ehtimal funksiyanın xassələrinə əsasən teorem 1.2.11-in (a) bəndini almış oluruq.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$$

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i^* = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ olan xassədən istifadə edərək (b) bəndini almaq üçün əvvəlcə birgə olmayan $A_1^*, A_2^*, \dots$ toplusunu qururuq. A -nın B ilə kəsişməyən hissəsini $A \setminus B$ ilə qeyd edərək, A_i^* -ni aşağıdakı kimi müəyyən edirik:

$$A_1^* = A_1, \quad A_i^* = A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right), \quad i = 2, 3, \dots$$

Bu ifadəni daha çox tanış olan simvollarla ifadə etsək, $A \setminus B = A \cap B^c$ kimi yazmaq olar. Buradan da aydındır ki, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i^* = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Buna görə də

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^*)$$

Burada A_i^* birgə olmayan olduğundan sonuncu bərabərlik alınır.

$$A_i^* \cap A_k^* = \left\{ A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right\} \cap \left\{ A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right) \right\} \quad (A_i^* \text{-nin tərifı})$$

$$= \left\{ A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)^c \right\} \cap \left\{ A_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)^c \right\} \quad (" \setminus " \text{-in tərifı})$$

$$= \left\{ A_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c \right\} \cap \left\{ A_k \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j^c \right\} \quad (\text{DeMorgan qanunları})$$

Əgər $i > k$ olsa, yuxarıdakı birinci kəsişmə A_k ilə boş kəsişməyə malik olan A_k^c çoxluğunda olacaq. Əgər $k > i$ olsa, arqument oxşardır. Daha sonra $A_i^* \subset A_i$ -nin qurulması ilə $P(A_i^*) \leq P(A_i)$ alır, beləliklə, teorem 1.2.11-in (b) bəndini əldə etmiş oluruq.

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^*) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

□